Tentamen Wiskunde 3,
18-06-1993, 9-12 uur, Examenhal.

1. (a) Veronderstel dat T en S lineaire afbeeldingen zijn van $V^k \to V^k$. Bewijs de volgende beweringen.
   (i) Als T en S unitair zijn, dan is TS unitair. [2]
   (ii) Als T en TS unitair zijn, dan is S unitair. [2]

   (b) Schets de kwadriek $x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ in een geschikt te kiezen orthonormaal assenstelsel.
   NB. Dit assenstelsel hoeft niet berekend te worden. [5]

2. Men definieert $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ met

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

en $\underline{g} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ met $\underline{g}(s) = \begin{pmatrix} s \\ \sin s \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Stel $h(s) = f \circ \underline{g}(s)$. Bepaal met de kettingregel voor het differentieren de afgeleide van h. [3]
   Controleer uw antwoord door differentiatie van de samengestelde functie. [1]

   (b) Stel $\underline{\ell}(x,y,z) = \underline{g} \circ f(x,y,z)$. Bepaal met de kettingregel de afgeleide van $\underline{\ell}$. [4]
   Controleer uw antwoord door differentiatie van de samengestelde functie. [1]

3. (a) De vergelijking $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$ definieert z impliciet als functie van x en y, zeg maar $z = f(x,y)$. Bepaal $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in termen van x, y en z. [5]

   (b) Door de vergelijkingen $\begin{cases} xu^2 + yzv + x^3z = 3 \\ xyv^3 + 2zu + u^2v^2 = 4 \end{cases}$ worden u en v in een omgeving van $(1,1,1)$ bepaald als functies van x,y,z: $u = U(x,y,z)$, $v = V(x,y,z)$ en

$$U(1,1,1) = 1 \qquad V(1,1,1) = 1.$$

   Bereken $\dfrac{\partial U}{\partial y}(1,1,1)$ en $\dfrac{\partial V}{\partial y}(1,1,1)$. [4]

4. We beschouwen de functie $f(x,y) = xy$ op de cirkelschijf

$$D = \{(x,y) \mid (x-2)^2 + y^2 \le 12\}$$

(a) Geef een tekenoverzicht van f op D en beredeneer dat f minstens 4 lokale extrema op D bezit. [2]

(b) Laat zien dat f geen lokale extrema in het inwendige van D heeft. [2]

(c) Bepaal de punten waarin de locale extrema worden aangenomen. [3]

(d) Bepaal de globale extrema van f op D. [2]

5. (a) Verwissel de integratievolgorde en bereken

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} x\sqrt{\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 dy} \right) dx.$$

[3]

(b) Bepaal $\iiint\limits_S zdxdydz$ waarbij

$$S = \{(x,y,z) \mid z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \geq z^2\} (a > 0).$$

[6]

Tentamencijfer $= 1 + \frac{1}{5}$ {behaalde aantal punten}.